第1讲 一次函数的概念

**课前思考**

**问题1：**原来长度为12厘米的弹簧挂上物体后会伸长，测得所挂物体的重量每增加1千克(所挂物体的重量最多10千克)，弹簧就伸长0.5厘米，那么弹簧的长度*y*(厘米)与所挂物体的质量*x*(千克)有怎样的函数关系式？

弹簧的长度*y*(厘米)与所挂物体的质量*x*(千克)应该是*y*=12+0.5*x*.

这里的定义域是什么？

**问题2：**生态公园计划在园内的坡地上造一片有*A*、*B*两种树的混合林，需要购买这两种树苗共2000棵．种植*A*、*B*两种树苗的相关信息如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 品种  项目 | 单价(元/棵) | 劳务费(元/棵) |
| *A* | 15 | 3 |
| *B* | 20 | 4 |

设购买*A*种树苗*x*棵，造这片林的总费用*y*元.请写出*y*(元)与*x*(棵)之间的函数关系式.

分析：总费用=*A*种树苗的费用+*B*种树苗的费用，其中每种树苗的费用包括树苗本身的总价格和种植这种树苗所需劳务费.

因此，*y*=(15+3)*x*+(20+4)(2000-*x*)=-6*x*+48000.

所以，造这片林的总费用*y*元与*A*种树苗*x*棵之间的函数关系式为*y*=-6*x*+48000.

**知识梳理**

**1．一次函数的概念**

一般地，解析式形如*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*(*k*、*b*是常数，且*k*≠0)的函数叫做**一次函数**．如：*y*=等都是一次函数．

特别地，当一次函数*y*=*kx*+*b*中的*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*为0时，则*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*(*k*为常数，*k*≠0)．这时，*y*叫做*x*的**正比例函数**．如：等都是正比例函数．因变量和自变量的比值是一个常数．

正比例函数是特殊的一次函数．

[注意](1)由一次函数和正比例函数的定义可知：

函数是一次函数其解析式可化为*y*=*kx*+*b*(*k*，*b*为常数，*k*≠0)的形式．

函数是正比例函数⇔其解析式可化为*y*=*kx*(*k*为常数，*k*≠0)的形式．

(2)一次函数解析式*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)的结构特征：

①*k*≠\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；②*x*的次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；③常数项*b*可以是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(3)正比例函数解析式*y*=*kx*(*k*≠0)的结构特征：

①*k*≠\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；②*x*的次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；③常数项*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**说明：若*k*=0，则*y*=*b*(*b*为常数)．这样的函数叫做常值函数，它不是一次函数．**

**2．待定系数法求一次函数解析式**

(1)**待定系数法：**先设待求函数关系式(其中含有未知系数)，再根据条件列出方程或方程组，求出未知系数，从而得到所求结果的方法，叫做待定系数法．

(2)用待定系数法求一次函数的解析式：先设出一次函数的关系式*y*=*kx*+*b*，由于它有两个待定系数，需要用两个条件建立两个方程的方程组，借以求得*k*，*b*的值．

(3)确定一次函数的解析式一般是利用待定系数法，其方法可归纳为“**一设二列三解四还原**”．其步骤如下：

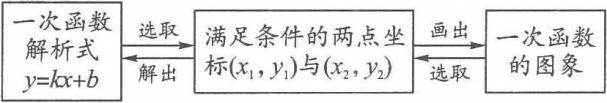
①一设：设出一次函数解析式的一般形式*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)；

②二列：根据已知两点或已知图像上的两个点的坐标列出关于*k*，*b*的二元一次方程组；

③三解：解这个方程组，求出*k*，*b*的值；

④四还原：将已求得*k*，*b*的值代入一般式．

其具体的程序如下：



**3．一次函数的定义域**

每一个函数都有它的定义域，一次函数的定义域是一切实数，也可以是部分实数．用解析法给出一次函数时，如果对函数的定义域不加以说明，那么就意味着定义域由解析式确定为一切实数，如果给出的这个一次函数的定义域不是一切实数，那么必须指明．

**典型解析**

**例1：**下列函数中，哪些是一次函数？哪些是正比例函数？

[解析]首先看每个函数的解析式能否通过变形转化为*y*=*kx*+*b*的形式，如果*x*的次数是1，且*k*≠0，则是一次函数，否则就不是一次函数；如果常数项*b*=0(*k*≠0)，那么它就是正比例函数.

[解]即其中是一次函数，也是正比例函数.

中关于自变量*x*的式子不是整式不是一次函数，也不是正比例函数.

(3)*y*=8*x*2+*x*(1-8*x*)经过变形转化为*y*=*x*，其中*k*=1，*b*=0.

∴*y*=8*x*2+*x*(1-8*x*)是一次函数，也是正比例函数.

(4)*y*=1+8*x*，即*y*=8*x*+1，其中*k*=8，*b*=1.

∴*y*=1+8*x*是一次函数，但不是正比例函数.

综上所述*y*=1+8*x*是一次函数是正比例函数.

[点评]形如*y*=*kx*(*k*是常数，*k*≠0)的函数，既是正比例函数，也是一次函数，注意此类问题中的解析式，若能进行化简变化，要先进行变形转化，再进行判断.

**【变式训练】**

下列解析式中，哪些是一次函数？

①；②*y*=*kx*+*b*；③*y*=(*k*2+1)*x*+*b*；④；⑤*h*=8*t*；⑥；⑦*m*=3*n*；⑧*q*=3*m*-2.

**例2：**(1)若函数是一次函数，求*k*的值.

解：由题意得解得*k*=2.所以，*k*的值为2.

(2)已知函数*y*=(*m*+1)*x*+(*m*2-1)，当*m*为何值时，*y*是*x*的一次函数？当*m*为何值时，*y*是*x*的正比例函数？

答案：当*m*≠-1时，*y*为*x*的一次函数.当*m*=1时，*y*是*x*的正比例函数.

**【变式训练】**

已知：*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)，当自变量增加3时，函数值相应地增加6，求*k*的值.

答案：*k*=2

**例3：**已知一个一次函数，当*x*=-1时，*y*=3；当*x*=2时，*y*=5，求这个一次函数的解析式.

**分析：**对于一次函数*y*=*kx*+*b*，只要确定*k*和*b*的值就确定了这个一次函数，因此把已知的自变量与相应的函数值代入，形成关于*k*和*b*的二元一次方程组，求解即可.

**解：**把*x*=-1，*y*=3；*x*=2，*y*=5代入*y*=*kx*+*b*，得解得

所以，这个一次函数的解析式为

**【小结：这里求一次函数解析式的方法是待定系数法.解析式中***k***、***b***是待定系数，利用两个已知条件列出关于*k*、*b*的方程组再求解，可确定它们的值.】**

**【变式训练】**

1．已知一次函数*y*=*f*(*x*)，且*f*(1)=1，*f*(-1)=-3，求函数*f*(*x*)的解析式．

答案：*y*=2*x*-1

2．已知一次函数的图像过点*A*(-2，3)、*B*(1，-1)，求这个一次函数的解析式．

答案：设*y*=*kx*+*b*(*k*≠0)，把*A*、*B*两点代入可得解析

**例4：**已知*y*与*x*-1成正比例，当*x*=-1时，*y*=3，则

(1)求*y*与*x*的函数解析式； (2)求当*x*=4时，*y*的值.

答案：(1)设*y*=*k*(*x*-1)(*k*≠0)，把*x*=-1，*y*-3代入，得；(2)当*x*=4时，*y*=-

**【变式训练】**

1．已知*y*-13和7*x*成正比例，当*x*=-1和时，两者的*y*值成相反数，求*y*=15时*x*的值．

答案：设*y*-13=7*kx*(*k*≠0)，把*x*代入，根据两者的*y*值成相反数得到方程-7*k*+13=6*k*-13，所以*k*=2，*y*=14*x*+13；当*y*=15时

2．已知*y*+*m*与*x*+*n*(*m*，*n*为常数)成正比例，则*y*与*x*成什么函数关系？并请说明理由．

答案：设*y*+*m*=*k*(*x*+*n*)(*k*≠0)，得*y*=*kx*+*kn*-*m*(*k*≠0)，所以*y*是*x*的一次函数

**例5：**已知一次函数

(1)求*f*(-2)，*f*(1)； (2)如果*f*(*a*)=4，求实数*a*的值.

答案：(1)*f*(-2)=，*a*=21

**【变式训练】**

1．已知函数*y*=3*x*+2，当*x*=*a*时的函数值为1，则*a*的值为( )．

答案：C

2．已知函数 (1)求当*x*=-1时，*y*的值；(2)求当*y*=3时，*x*的值．

答案：(1)当*x*=-1时；(2)*y*=3时，*x*=8

**例6：**生物学家研究表明，某种蛇的长度*y*(厘米)是其尾长*x*(厘米)的一次函数，当蛇的尾长为6厘米时，蛇的长为45.5厘米；当蛇的尾长为14厘米时，蛇的长为105.5厘米.当一条蛇的尾长为10厘米时，这条蛇的长度是多少？

答案：75.5厘米

**【变式训练】**

一盘蚊香长为105厘米，点燃时每小时缩短10厘米.

(1)写出一盘蚊香点燃后的长度*y*(厘米)与点燃时间*t*(时)之间的函数解析式；

(2)该盘蚊香可以用多少时间？

答案：(1)因为蚊香点燃时，每小时缩短10厘米，所以*t*小时缩短10*t*厘米，所以*y*=105-10*t*；(2)当*y*=0时，105-10*t*=0，解得*t*=10.5

**例7：**已知反比例函数的图像与一次函数*y*=3*x*+*m*的图像相交于点(1，5).

(1)求这两个函数的解析式.

(2)求这两个函数图像的另一个交点的坐标.

**例8：**已知一个一次函数*y*=*kx*+*b*(*k*为非零整数)的图像过点(98，19)，它与*x*轴的交点为(*p*，0)，与*y*轴的交点为(0，*q*)，若*p*是质数，*q*是正整数，那么满足条件的所有一次函数的个数有多少个？

答案：0

**例9：**求证：不论*k*为何值，直线(2*k*-1)*x*-(*k*+3)*y*-(*k*-11)=0恒过定点.

**同步训练**

**一、填空题**

1．如果*y*=*kx*+1是常值函数，则*k*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0

2．如果一次函数*y*=*ax*+3，当时，*y*=1，则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：4

3．已知函数：②*y*=0.5*x*+1④*y*=2*R*(*R*为自变量)，其中是一次函数的有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：①②④

4．已知函数*y*=(*a*-2)*x*+1-2*b*是一次函数，则*a*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*b*\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：≠2，取一切实数

5．若一次函数*y*=3*m*(*x*-4)+1表示正比例函数，则*m*=\_\_\_\_\_\_．

答案：

6．如果*y*=*kx*+5表示一条直线，那么*k*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案： 一切实数

7．函数*y*=3*x*+1的自变量*x*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：一切实数

8．曾叔叔的庄园里已有50棵树，他决定今后每年栽2棵树，则曾叔叔庄园树木的总数*y*(棵)与年数*x*的函数关系式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；它是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_函数．

**二、选择题**

9．下列四个命题中，错误的是( )．

(A)正比例函数一定是一次函数

(B)反比例函数不是一次函数

(C)若*y*-1和*x*成正比例，则*y*是*x*的一次函数

(D)若*y*-1和*x*成反比例，则*y*是*x*的一次函数

答案：D

10．下列函数：

①*y*=*m*(*x*-5)(*m*≠0)；

③*y*=-(*k*+3)*x*(*k*≠-3)

其中是一次函数的有( )．

(A)①②③④ (B)① (C)①②③ (D)①③

答案：C

**三、解答题**

11．函数*y*=(*m*+2)+*m*-1表示一次函数．

(1)求它的解析式； (2)求*f*(10)的值．

答案：*m*=2，得*y*=4*x*+1；(2)*f*(10)=

12．已知一次函数图像过点(3，5)与(-4，-9)，求这个一次函数的解析式．

13．甲市到乙市的包裹邮资为每千克0.9元，每件另加手续费0.2元，求总邮资*y*(元)与包裹重量*x*(千克)之间的函数解析式，并计算5千克重的包裹的邮资．

14．一根蜡烛长12厘米，点燃后每分钟缩短0.6厘米.

(1)求点燃后蜡烛长*y*(厘米)与点燃时间*x*(分)之间的函数解析式；

(2)求蜡烛缩短至3厘米所需的时间.

答案：(1)*y*=-0.6*x*+12；(2)当*y*=3时，-0.6*x*+12=3，解得*x*=15

**走进中考**

(2015·上海中考) 同一温度的华氏度数*y*(℉)与摄氏度数*x*(℃)之间的函数关系是*y*＝*x*＋32．如果某一温度的摄氏度数是25℃，那么它的华氏度数是\_\_\_\_\_\_\_\_℉．

【答案】77